Espaces préhilbertiens Complexes

I Produit scalaire hermitien :

*E est un $\mathbb{C}$-ev $\langle , \rangle$ $E^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ est un p.s hermitien ssi

$\forall x \in E$ $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est $\mathbb{C}$ linéaire
$\forall y \in E$ $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est semi-linéaire $\langle \lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$
$\forall (x,y) \in E^2$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
$\forall x \in E\setminus\{0\}$ $\langle x, x\rangle > 0$

** $\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x|x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$
$\|x-y\|_2^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$
$\|x-iy\|_2^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, iy\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$
$\|x+iy\|_2^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,\langle x, y\rangle$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|_2^2 - \|x-y\|_2^2 + i\left(\|x-iy\|_2^2 - \|x+iy\|_2^2\right)\right)$$

Ex $E = \mathbb{C}$, $(z, w) \longrightarrow \bar{z}w$
$E = \mathbb{C}^n$ $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$
$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$

Ex : $E = M_n(\mathbb{C})$ $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\bar{A}B)$ $(A^* = {}^t\bar{A})$

Ex (1) $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{f}g$

Coco-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2$ $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2$

D/ On suppose $y \neq 0$ soit θ $e^{i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$
Soit $t \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(t) = \|x + t e^{i\theta} y\|^2 = \|x\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x, e^{i\theta}y\rangle + t^2\|y\|^2$

$= \|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + t^2\|y\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow \Delta \leq 0$ $4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$

Minkowski : Idem ⚠ | Pythagore
Médiane

II Espaces Hermitiens :

Notions usuelles : S.O, SON GOKU, ils sont libres

Existence de BON : On fixe $e \in E \setminus \{0\}$ avec $\|e\| = 1$, $(e)^{\perp} = \{x \in E \mid \langle e, x\rangle$
est un hyperplan de E qui possède une BON que l'on complète avec (e)

* Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E $\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \rangle$

$$= \sum_{k,\ell} \langle x_k e_k, y_\ell e_\ell \rangle$$

$$= \sum_{k,\ell} \overline{x_k} y_\ell \langle e_k, e_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

Normale : Si H est un hyperplan $H = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n = 0$

g $X = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$ vérifie $H = \{Y \mid \langle X, Y\rangle = 0\}$

Procédé de Schmidt : $H = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \longrightarrow \varepsilon_n \in H^{\perp}, \|\varepsilon_n\|_2 = 1$

Ex : Soit G un groupe fini, on pose, pour $f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$, $\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{f(a)} g(a)$
$\langle , \rangle$ est un PSH sur $\mathcal{F}(G, \mathbb{C}) = E$

Soit χ un caractère de G ie $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$

Soient : ① $n = |G|$ et $a \in G$, $a^n = e \Rightarrow \chi(a)^n = 1$, $\chi(a) \in \mathbb{U}_n$ $\left(\overline{\chi} = \frac{1}{\chi}\right)$

② $\Phi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C})$ $\Phi \neq 1$ $\quad \sum_{a \in G} \Phi(a) = \sum_{a \in G} \Phi(ba)$
$b, \Phi(b) \neq 1$

$$= \Phi(b) \sum_{a \in G} \Phi(a)$$

③ Soit Ψ un caractère $\neq \chi$

$$\langle \Psi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \overline{\Psi(a)} \chi(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} \left(\frac{\chi}{\Psi}\right)(a) = 0$$

$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 = 1.$

|| Si G est abélien, c'est une BON de E

III Opérateurs unitaires (E hermitien)

Déf : $u : E \xrightarrow{lin} E$ est unitaire lorsque $\forall x \in E$ $\|u(x)\|_2^2 = \|x\|_2^2$

ie $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (Polarisation)

Prop : ① $(U(E), \circ)$ est un ssg de $GL(E)$

② (e_i) BON, $u \in U(E) \Leftrightarrow (u(e_i))$ est une BON.

③ F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u.

④ Si $u \in U(E)$, spec $(U) \subset S^1$

⑤ $u \in U(E)$ $\Updownarrow$ u DZ est BON avec spec $U \in S^1$

D/ ① rec, ② vérifier

Matrice unitaire : $U^* U = I_n$

$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ | \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $\langle C_j, C_\ell \rangle_{can} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{kj}} a_{k\ell}$

$=$ terme d'indice (k, ℓ) de $U^* U$

Prop : U unitaire $\Leftrightarrow$ les colonnes forment une BON de $\mathbb{C}^m$ de $\mathbb{C}^n$ can. $\Leftrightarrow U = [u]_{(e)}$ | (e) BON, $u \in U(E)$

IV Projection orthogonale.

Th : Soit F un sev de E de dim finie

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une BON de F

① $\pi : x \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \langle \varepsilon_k, x \rangle \varepsilon_k$ est le p o de E sur F

② On a $F \oplus F^\perp = E$

③ Si $x \in E$, $\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2$

④ $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{p} |\langle \varepsilon_k, x\rangle|^2$

D/ ① $\pi(E) \in F$, $\pi(\varepsilon_\ell) = \sum_{k=1}^{m} \overbrace{\langle \varepsilon_k, \varepsilon_\ell\rangle}^{\delta_{k\ell}} \varepsilon_k = \varepsilon_\ell$ | $\pi(E) \subset F$, $\pi|_F = \mathrm{id}_F$, ok

② Si $x \in \operatorname{Ker} \pi$ $\langle \varepsilon_k, x\rangle = 0$, $k = 1 \dots p$

donc $x \perp \varepsilon_k$ $k = 1 \dots p$
$x \perp F$

③ $x = \underbrace{x - \pi(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{\pi(x)}_{\in F}$ Pythagore

$\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2 \geq \underbrace{\|\pi(x)\|^2}_{B\ ON\ \sum_{k=1}^{p} |\langle \varepsilon_k, x\rangle|^2}$

Compléments

I- Décomposition de Cartan (IWASAWA) :

1) Changements de base, orientation :

$(E, \langle\,,\,\rangle)$ est un ev eucl. : $(e), (f), (g)$ sont trois bases de E

$(e) \xrightarrow{P} (f) \xrightarrow{Q} (g)$ ‖ La matrice de passage (e) à (g) est PQ.

$X = PX' = PQX''$

Def : On dit que deux bases de E, (e) et (f), ont la même orientation, lorsque :

$\underbrace{\det_{(e)}(f)}_{\det P} > 0$. Not : $(e) \sim (f)$.

Rq : On est dans $\mathbb{R}$, ici.

Prop : $\sim$ est une relation d'équivalence possédant exactement deux classes.

D/ On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E : La matrice de $(-e_1, \dots, e_n)$ dans (e) est $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, de det $= (-1)$; $(e_1, \dots, e_n) \not\sim (-e_1, \dots, e_n)$.

Soit (f) une base de E.

① si $\det_{(e)}(f) > 0$, on a $(f) \in \overline{(e)}$

② Sinon, $P = [f]_{(e)}$ a un déterminant < 0

Soit $Q = [f]_{(-e_1, e_2, \dots, e_n)}$; $Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} P$

$\det Q = -\det P > 0$ ✓

Déf : Orienter E, c'est choisir une des bases (bases positives " directes.)

Produit mixte : On choisit une BON positive de E, soit (e).

Prop : Soient (f) une BON de E, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- Si (f) est **directe**, $\det_{(f)}(x_1, \dots, x_n) = \det_{(e)}(x_1, \dots, x_n)$
- Si (f) est **indirecte**, $\det_{(f)}(x_1, \dots, x_n) = -\det_{(e)}(x_1, \dots, x_n)$

D/ Soit $P = [f]_{(e)}$, $\begin{cases} X_i = [x_i]_{(e)} \\ X_i' = [x_i]_{(f)} \end{cases}$. IP nous $X_i = PX_i'$

$\rightarrow \underbrace{\det(X_1, \dots, X_n)}_{\det_{(e)}(x_i)} = \det(PX_1', \dots, PX_n')$

$= \det P \det(X_1', \dots, X_n')$

Th-Déf : Soit $(x,y) \in E^2$, il existe, et de façon unique, $w \in E$ tq $\forall z \in E$ $[x,y,z] = \langle w, z \rangle$ $\{ w = x \wedge y$

D/ $z \xmapsto{\varphi} [x,y,z]$ est une forme linéaire sur E donc

$\exists! w \in E$ $\varphi = \langle w | \cdot \rangle$.

Coordonnées ($\mathbb{R}^3$ can) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = w_1 z_1 + w_2 z_2 + w_3 z_3$

$\rightarrow \begin{cases} w_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ w_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ w_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{cases}$

Ex : Mq $a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c \rangle b - \langle a | b \rangle c$

Angle de rotation D ($n=2$)

On fixe une BON (e_1, e_2) si $u \in SO(E)$

$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

si (f) est une autre BON $P = [f]_{(e)} \in SO_2(\mathbb{R})$

$[u]_{(f)} = P^{-1} R_\theta P = R_\theta$ (SO_2 abélien en dim 2)

si $(f_1, f_2) = (-e_1, e_2)$, $P^{-1} R_\theta P = R_{-\theta}$

$P_{n=3}$:

axe Δ, on oriente l'axe $-e_3$
ce qui fixe une orientation de $\Delta^\perp$
et donne un angle $[2\pi]$ de $u|_{\Delta^\perp}$

$(e_3 \longrightarrow -e_3 \, , \, \theta \longrightarrow -\theta)$

B) Décomposition de Cartan Cartan

Ex Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe, et de façon unique $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+$ tq $A = OT$
T. S à diag > 0

D/ Unicité $OT = O_1 T_1 \longrightarrow \underbrace{O_1^{-1} O}_{U} = T_1 T^{-1}$

U est orthogonale, T.S. à diag > 0, de m̂ pour ${}^tU \longrightarrow U = I_n$

▷ Existence : Soient (ε_i) base can de $\mathbb{R}^n$
(e_i) base des colonnes de A | (f_i) la base de Schmidt de (e_i)

On regarde le chang^t de base $(\varepsilon_i) \xrightarrow{A} (e_i) \xrightarrow{T_0} (f_i)$
$\langle e_i ; f_i \rangle = T_0^{-1}(ii) > 0$

Précisons $T_0 = [f_i]_{(e_i)}$ $T_0^{-1} = [e_i]_{(f_i)}$

Si $O = [f_i]_{(\varepsilon_i)}$ il vient $AT_0 = O \longrightarrow A = O T_0^{-1}$.

Rq : l'ensemble compact → réi $\mathcal{C}^0$

Exo : Mq $\left|\begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^+ \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, T) \longrightarrow OT \end{array}\right.$ est un homéomorphisme

D/ φ est bijective $\mathcal{C}^0$: OK
Soit $(A_k) \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tq $A_k \longrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$ | $A_k = O_k T_k$
$A = OT$

$O_n(\mathbb{R})$ est compact $\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ $\exists O' \in O_n(\mathbb{R})$ tq $O_{\varphi(k)} \to O'$

$T_{\varphi(k)} = O_{\varphi(k)}^{-1} A \to O'^{-1} A$

il vient $O'^{-1} A = T' \in \mathcal{T}_n^+$ | $A = O'T'$ par unicité $O = O'$, $T = T'$

inversible triangulaire diagonale >0 dans $[\ ]$

** Cela est valable pour toute extraction convergente de O_k dans le compact $O_n(\mathbb{R})$ la seule VA de O_k est O

$\begin{cases} O_k \to O \\ T_k \to T \end{cases}$

Ex : $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe ($\det > 0$)

S/ $\underbrace{SO_n}_{\text{connexe}} \times \underbrace{\mathcal{T}_n^+}_{\text{connexe}} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} GL_n^+(\mathbb{R})$ est surjective

C) Inégalité de Hadamard $(E, \langle , \rangle)$ eve (quantité)

Ex : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a $|[x_1 \dots x_n]| \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_2$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on a égalité ssi $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonal

II Matrice de Gram :

A) Généralités $(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien

Déf : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_p \in E$ $G(x_1, \dots, x_p) = [\langle x_i, x_j \rangle]_{1 \leq i, j \leq m}$ (sym)

$|G|(x_1, \dots, x_p) = \det[\langle x_i, x_j \rangle]_{1 \leq i, j \leq m}$

Prop 1) Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une SON tq $x_1, \dots, x_p \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et si $A = [x_j]_{\varepsilon_i}$, $G(x_1, \dots, x_p) = {}^tAA$

② $|G|(x_1,\dots,x_p) \geq 0$ et $|G|(x_i) > 0 \iff (x_i)$ libre

③ Soit $M = G(x_1,\dots,x_p)$. Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
On a $\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p\|_2^2 = {}^t\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$

3

④ Si $\mu \in \operatorname{spec}(M)$ on a $\mu \geq 0$

⑤ On suppose E DF, Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(x_i),(y_i) \in E^p$. Alors
$G(x_i) = G(y_i) \iff \exists u \in O(E), \forall i \in [\![1,p]\!], y_i = u(x_i)$

D/① $A = [C_1 | \dots | C_p]$, ${}^tAA = [{}^tC_iC_j]_{1\leq i,j\leq p}$ (E) BON
$= [\langle x_i | x_j\rangle]$

② $|G|(x_i) = \det A^2$

③ $\|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m\|_2^2 = \sum_{1\leq i,j\leq p} \lambda_i\lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = {}^t\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$

④ $M\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$: $\underbrace{{}^t\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix} M \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}}_{\geq 0} = \mu\,\underbrace{(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2)}_{>0}$

⑤ ($\Leftarrow$) $\underbrace{\langle u(x_i), u(x_j)\rangle}_{\langle y_i, y_j\rangle} = \langle x_i, x_j\rangle$ car $u \in O(E)$

($\Rightarrow$) Quitte à permuter $(x_1,\dots,x_r)$ est libre
$x_{r+1},\dots,x_m \in \operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_r)$

i) $(y_1,\dots,y_r)$ est libre $|G|(y_1,\dots,y_r) = |G|(x_1,\dots,x_r) > 0$

ii) Si $k \geq r+1$, $y_k \in \operatorname{Vect}(y_1,\dots,y_r)$: $\underbrace{|G|(y_1,\dots,y_r\, y_k)}_{\text{lié}}$

hyp $|G|(x_1 \dots x_r x_k) = 0$.

On pose $u(x_i)=y_i$ $i=1\dots n$: u envoie linéairement $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ sur $\mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_n)$

u est une isométrie $\|\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n\|^2 = {}^t\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} M(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$

$$\|u(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n)\|^2 = \|\lambda_1 y_1+\dots+\lambda_n y_n\|^2$$

$$= {}^t\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} M(y_1,\dots,y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

u isométrie

$\langle u(x_{n+1})-y_{n+1}, y_i\rangle = \langle u(x_{n+1}), u(x_i)\rangle - \langle y_{n+1}, y_i\rangle$
$i\in[\![1,n]\!]$

égalité des produits scalaires + u isométrie

$$= \langle y_{n+1}, y_i\rangle - \langle y_{n+1}, y_i\rangle = 0$$

(CCP) $u(x_{n+1})-y_{n+1} \perp \mathrm{Vect}(y_1,\dots,y_n) \to$ nul

(CC) On prolonge en envoyant une BON de $\mathrm{Vect}(x_i)^\perp$ sur une BON de $\mathrm{Vect}(y_i)^\perp$ ✓

Calcul de la distance par Gram :

(H) $(x_1,\dots,x_p)$ libre $F=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)$, $a\in E$

alors $$d(a,F)^2 = \frac{|G|(a, x_1,\dots,x_p)}{|G|(x_1,\dots,x_p)}$$

S/ $a=u+v$ $\begin{cases} u\in F\\ v\in F^\perp\end{cases}$ $|G|(a,x_1,\dots,x_p) = \begin{vmatrix}\langle a|a\rangle & \dots & \langle a|x_p\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle a|x_p\rangle & \dots & \langle x_p|x_p\rangle\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}\|u\|^2+\|v\|^2 & \dots\\ \vdots & (\langle x_i, x_j\rangle)\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\|v\|^2 & \dots\\ 0 & \\ \vdots & (\langle x_i, x_j\rangle)\\ 0 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\|u\|^2 & \dots\\ \langle u, x_i\rangle & (\langle x_i, x_j\rangle)\end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\|\bar{v}\|^2}_{d(v,F)^2} |G|(x_i) + \underbrace{|G|(x_1, x_2, \dots, x_p)}_{= \text{cste}}$$